به نام او

ریاضی عمومی ۱

همگرایی مطلق

گزاره. فرض کنید a_i ها اعداد حقیقی دلخواه باشند و داشته باشیم $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ همگرا است. آنگاه $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ نیز همگرا است.

اثبات. $b_i = |a_i| + a_i$, $c_i = -|a_i|$

$$\left.\begin{array}{l} b_i \geq 0 \\ b_i \leq 2|a_i| \\ \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \text{ همگرا} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{ همگرا است}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} -c_i \text{ همگرا} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c_i \text{ همگرا}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{b_i + c_i}_{a_i} \text{ همگرا}$$

نکته. برعکس گزاره بالا درست نیست.

$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگرا است.

ولی $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right|$ واگرا است.

آزمون لایب نیتس برای سری‌های متناوب.

فرض کنید $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots \ge 0$ که $a_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$. آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ همگراست.

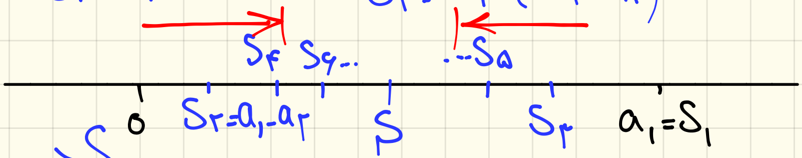
اثبات. فرض کنید $S_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i$ باشد

$S_{2n} \le S_{2n+2}$ $\quad S_2 \le S_4 \le S_6 \le \dots$

$S_{2n+1} \ge S_{2n+3}$ $\quad S_1 \ge S_3 \ge S_5 \ge \dots$

برای هر m,n دلخواه $S_{2n+1} \ge S_{2m}$.

$S_2 = a_1 - a_2$ $\quad S_3 = a_1 + (-a_2 + a_3)$



$S_{2n-1} \ge S_{2n}$

$S_{2m} \le S_{2n} \le S_{2n+1}$ $\quad n>m$

$S_{2n+1} \ge S_{2m+1} \ge S_{2m}$ $\quad n \le m$

S_{2n} ها صعودی و کران دارند. در نتیجه کوچکترین کران بالایی مانند S دارند

S_{2n+1} ها نزولی و کران دارند و بزرگترین کران بالایی مانند S' دارند.

$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0 \Rightarrow S = S'$

$$S_{2n} \uparrow S \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists N \ \forall n\geq N \quad 0\leq S-S_{2n} \leq \varepsilon/2$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow \exists N' \ \forall n>N' \quad a_{2n+1} < \varepsilon/2$$

$$|S-S_{2n+1}| \leq |S-S_{2n}| + |a_{2n+1}| < \varepsilon$$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگرا است. (نتیجه برای تست لایب نیتس.

$$a_1+a_2+\dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}}_{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}} = \infty - \infty$$

در تغییر ترتیب جملات یک سری باید بسیار محتاط بود و اگر سری به طور مطلق همگرا نباشد این کار مجاز نیست.

قضیه. اگر سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد با تغییر ترتیب a_i ها می‌توان به هر عددی آن را میل کرد.