به نام او

ریاضی عمومی ۱

سری‌های عددی ۲

"همگرایی یک سری مستقل از هر متناهی جمله آن سری است."

$a_i \to b_i$

$a_i = b_i$ مگر برای متناهی i.

همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ باهم معادلند.

آزمون مقایسه. فرض کنید $0 \le b_i$ و a_i و عدد صحیح $0 \le k$ وجود دارد که برای $i \ge k$ داشته باشیم، $a_i \ge b_i$. آنگاه

الف) همگرایی $\sum a_i \Leftarrow$ همگرایی $\sum b_i$

ب) واگرایی $\sum b_i \Leftarrow$ واگرایی $\sum a_i$

مثال: فرض کنید $x > 0$ عدد حقیقی باشد. آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ همگرا است.

$a_n = \frac{x^n}{n!}$

اثبات. فرض کنید k عدد طبیعی باشد که $k > x$. در نتیجه برای $n > k$ داریم

$$a_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} \times \frac{x}{k+1} \times \frac{x}{k+2} \times \dots \times \frac{x}{n} \le a_k \times \underbrace{\frac{x}{k} \times \dots \times \frac{x}{k}}_{n-k} = a_k \times \left(\frac{x}{k}\right)^{n-k}$$

$$b_n = a_k \times \left(\frac{x}{k}\right)^{n-k} \quad (\text{برای هر } n)$$

$$b_n = \underbrace{a_k \times \left(\frac{k}{x}\right)^k}_{c} \times \left(\frac{x}{k}\right)^n = c\left(\frac{x}{k}\right)^n$$

همگرا $\sum b_n \Rightarrow$ همگرا $\sum a_n$

مثال: p-سری: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ، $p>0$ عدد داده شده.

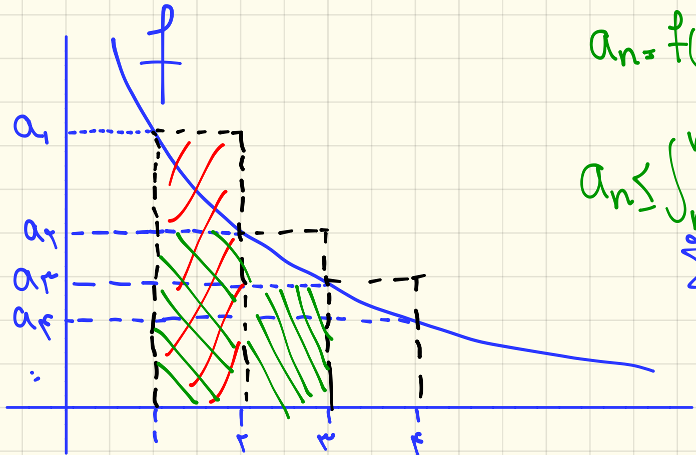
$$\left.\begin{array}{l} p<1 \Rightarrow \dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{n} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ واگرا} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ واگرا}$$

از آزمون مقایسه برای $p>1$ با سری $\sum \frac{1}{n}$ نمی‌توان حکمی به‌دست آورد.

آزمون انتگرال. فرض کنید f تابعی نزولی و پیوسته و نامنفی باشد و a_n دنباله‌ای نامنفی باشد و فرض کنید $f(n)=a_n$.

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست $\Leftrightarrow$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا.

$$a_n = f(n) \geq f(x) \quad \forall x \in [n, n+1]$$



$$a_n = f(n) \leq f(x) \quad \forall x \in [n-1, n]$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \leq \int_{n-1}^{n} f \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leq a_1 + \int_1^{n} f$$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرای $\Leftarrow \int_1^{\infty} f$ همگرای

$$a_1 \geq \int_1^2 f(x)\,dx \quad a_2 \geq \int_2^3 f \quad \cdots \quad a_n \geq \int_n^{n+1} f$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \int_1^{n+1} f \Rightarrow$ [$\sum a_i$ همگرای $\Rightarrow \int_1^{\infty} f$ همگرای]

مثال: P-سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$f(x) = 1/x^p \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_1^\infty f = \begin{cases} \ln x \Big|_1^\infty = \infty & p=1 \\ \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}} \Big|_1^\infty \begin{cases} \infty & p<1 \\ \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1} & p>1 \end{cases} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p>1$ همگرا و برای $p\leq 1$ واگراست.

آزمون مقایسه نسبت. $\sum a_i$ و $\sum b_i$ دو سری با جملات نامنفی و فرض کنید b_nها مثبت باشند.

الف. فرض کنید عدد طبیعی N و عدد حقیقی M وجود داشته باشد که برای هر $i>N$ داشته باشیم $\frac{a_i}{b_i} \le M$. آنگاه همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ همگرایی $\sum a_i$ را نتیجه می‌دهد.

ب. فرض کنید عدد طبیعی N و عدد حقیقی مثبت m وجود داشته باشد که برای $i>N$، $\frac{a_i}{b_i} > m$. آنگاه واگرایی $\sum b_i$ واگرایی $\sum a_i$ را نتیجه می‌دهد.

الف) $i>N \Rightarrow a_i < Mb_i$

$\sum b_i$ همگرایی $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Mb_i$ همگرایی $\xrightarrow{\text{مقایسه}}$ $\sum a_i$ همگرا

ب) $i>N \Rightarrow a_i > mb_i$

$\sum b_i$ واگرایی $\overset{m>0}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} mb_i$ واگرایی $\xrightarrow{\text{مقایسه}}$ $\sum a_i$ واگرا

آزمون حد نسبت.

فرض کنید $a_i>0$ و $b_i>0$ و همچنین فرض کنید $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = L \in [0,\infty]$

الف) اگر $L\in[0,\infty[$ آنگاه همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$، همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ را نتیجه می‌دهد. از جایی به بعد $\frac{a_i}{b_i} < L+1$

ب) اگر $L\in]0,\infty]$ آنگاه واگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$، واگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ را نتیجه می‌دهد. از جایی به بعد $\frac{a_i}{b_i} > L/2 > 0$

اثبات: نتیجه بدیهی آزمون مقایسه نسبت.

مثال. $x>0$ و $\sum \frac{x^n}{n!}$ و $\sum (1/2)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n/n!}{(1/2)^n} = (2x)^n/n! \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

مثال: $\sum \frac{n^3-4n^2+1}{10n^5-4n^3+2}$

$$\frac{\frac{n^3-4n^2+1}{10n^5-4n^3+2}}{1/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{10}$$

آزمون نسبت. فرض کنید $a_n>0$ و همچنین حد $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ موجود و برابر L باشد. آنگاه

* اگر $L<1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست

* اگر $L>1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست ⇐ از جایی به بعد $a_{n+1}>a_n$ ⇐ a_n مثبت a_nها به صفر میل نمی‌کنند ⇐ واگرا

* اگر $L=1$ ، سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد

اثبات. فرض کنید $L<1$: $\exists N>0 \quad \forall n\geq N$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underbrace{\frac{1+L}{2}}_{r<1}$ ، $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L<1$

$$\Rightarrow \forall n\geq N \quad a_n < r^{n-N}a_N = r^n \frac{a_N}{r^N}$$

$c = cr^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا

$\sum cr^n$ همگرا

مثال: $\sum \frac{1}{n} \quad \sum \frac{1}{n^2}$

مثال: $\sum \frac{x^n}{n!}$: $\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ⇐ سری همگرا

آزمون ریشه. فرض کنید $a_n \ge 0$ و $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} L$.

الف) اگر $L>1$، سری واگرا (اگر $\sqrt[n]{a_n} > L > 1$ از جایی به بعد) $\Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ سری واگرا

ب) $L<1$ سری همگرا (اگر $\sqrt[n]{a_n} < L < 1$ از جایی به بعد)

ج) $L=1$، آزمون جوابی نمی‌دهد.

$$\sqrt[n]{a_n} < L \Rightarrow a_n < L^n$$

$L<1 \Rightarrow \sum L^n$ همگرا $\Rightarrow \sum a_n$ همگرا