به نام او

ریاضی عمومی ۱

سری‌های عددی ۱

$a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ $\qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

گوییم سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگراست $\iff$ $\exists S;\ S_n \xrightarrow{n\to\infty} S$

$$S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\ge N\quad |S_n - S| < \varepsilon/2 \xRightarrow{m\ge N} |S_n - S_m| \le \underbrace{|S_n - S|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|S - S_m|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n\ge N\quad |\overbrace{S_{n+1} - S_n}^{a_{n+1}}| < \varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| \le \varepsilon \Rightarrow a_n \to 0$$

گزاره: اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرا باشد آنگاه $a_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$.

نکته: $a_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ شرط کافی برای همگرایی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ نیست.

سری همساز $\qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots$

$$= \underbrace{1}_{\ge 1/2} + \underbrace{1/2}_{\ge 1/2} + \underbrace{(1/3 + 1/4)}_{\ge 1/2} + \underbrace{(1/5 + \dots + 1/8)}_{\ge 1/2} + \underbrace{(1/9 + \dots + 1/16)}_{\ge 1/2} + \dots \ge 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots$$

اگر $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_i}_{S_a}$, $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} b_i}_{S_b}$ همگرا باشد، $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm b_i$ همگراست به $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{\infty} b_i = S_a \pm S_b$

اگر $S_a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و r عدد حقیقی باشد $\sum_{i=1}^{\infty} r a_i$ همگراست به rS_a.

اثبات. $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i - (S_a + S_b)\right| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_a \quad \forall n \geq N_a \quad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - S_a\right| < \varepsilon/2$$

$$\exists N_b \quad \forall n \geq N_b \quad \left|\sum_{i=1}^{n} b_i - S_b\right| < \varepsilon/2$$

$$\forall n \geq \max(N_a, N_b) \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i - (S_a + S_b)\right| < \varepsilon$$

اثبات قسمت ۲. $r=0$ واضح. اگر $r \neq 0$ داریم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - S\right| < \frac{\varepsilon}{|r|} \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} r a_i - rS\right| = |r| \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - S\right| < |r| \frac{\varepsilon}{|r|} = \varepsilon$$

مثال: r, c عدد حقیقی $\quad a_i = cr^i \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} cr^i$ سری هندسی

$c=0$ قطعاً همگراست. فرض کنید $c \neq 0$. در نتیجه همگرایی $\sum_{i=0}^{\infty} cr^i$ معادل است با همگرایی $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$.

$$\left.\begin{array}{l} S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i \\ rS_n = \sum_{i=1}^{n+1} r^i \end{array}\right\} \Rightarrow rS_n - S_n = r^{n+1} - 1 \xRightarrow{r \neq 1} S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r-1}$$

$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$: واگراست $\quad |r|>1 \Rightarrow S_n$

$$|r|<1 \Rightarrow S_n \xrightarrow{n \to \infty} \frac{0-1}{r-1} = \frac{1}{1-r} = \sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

همگرا $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$

$|r|=1 \Rightarrow r^i \not\xrightarrow{i \to \infty} 0 \Rightarrow$ سری واگراست.

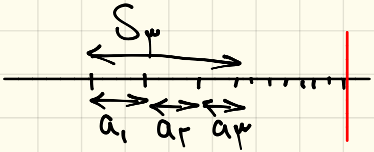
سری هندسی با $c \neq 0$ همگراست اگر و فقط اگر $|r|<1$.

دلایل عدم همگرایی سری‌ها:

بی کرانی $\leftarrow$ مثال $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

نوسان زیاد $\leftarrow$ مثال $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$$



$$-1+1-1+1-1+1\cdots$$

$$S_{2n}=0 \qquad S_{2n+1}=-1$$

مثال:

$$a_n=\begin{cases} \frac{-1}{n} & 2^{2i}+1 \le n \le 2^{2i+1} \\ \frac{1}{n} & 2^{2i+1}+1 \le n \le 2^{2i+2} \end{cases}$$

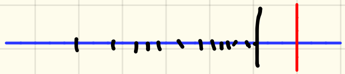
$$\underbrace{+1}_{|\downarrow|\ge 1/2}\ \underbrace{-1/2}_{|\downarrow|\ge 1/2}\ \underbrace{+1/3+1/4}_{|\downarrow|\ge 1/2}\ \underbrace{-1/5-1/6-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{|\downarrow|\ge 1/2}\ \underbrace{+\left(1/9+\dots+1/16\right)}_{|\downarrow|\ge 1/2}\ \underbrace{-\left(1/17+\dots+1/32\right)}_{|\downarrow|\ge 1/2}\cdots$$

$$|S_{2^n}-S_{2^{n+1}}|\ge 1/2$$

نتیجه: در مورد سری‌ها $\sum a_i$ که همه a_i ها هم علامت هستند فقط ممکن است شکل بی‌کرانی $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ داشته باشیم.

گزاره. اگر $a_i \geq 0$ باشند $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگراست $\iff$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ها کران دار باشند

اثبات. چون $a_i \geq 0$ هستند S_n ها صعودی‌اند. با توجه به کران دار بودن S_n ها، S_n ها دارای کوچکترین کران بالایی مانند S هستند و چون دنباله‌ی $\{S_n\}_{n\geq 1}$ صعودی و کران دار است، به کوچکترین کران بالا، خود میل می‌کند.



گزاره. آزمون مقایسه. $0 \leq a_i , b_i$ باشند و $a_i \geq b_i$. آنگاه اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ همگرا $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ همگراست

اگر $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ واگرا $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ واگراست.

اثبات. فرض کنید $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $\Rightarrow$ برای هر n

$$S \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} b_i$$

برعکس. واضح است.