به نام او

ریاضی عمومی ۱

انتگرال ناسره

انتگرال ناسره نوع اول.

$f:[a,\infty[\to \mathbb{R}$ و f برای هر $b\in[a,\infty[$ روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. (علی‌الخصوص f روی هر $[a,b]$ کران‌دار است).

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f \quad \text{درصورت وجود} \longrightarrow \int_a^\infty f \quad \text{همگرا است.}$$

مثال. $p\in\mathbb{R}^+$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln x\Big|_1^b = \ln b & p=1 \\ \dfrac{1}{1-p}\dfrac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^b = \dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}}-1\right) & p\neq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \lim\limits_{b\to\infty}\ln b = \infty \\ p>1 & \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \dfrac{1}{p-1} \\ p<1 & \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{b^{p-1}}-1\right) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} p>1 & \text{همگرا} \\ p\leq 1 & \text{واگرا} \end{array}$$

مثال ۲ $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$

$\alpha>0$ $\quad \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\alpha x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha b}\right) = 1/\alpha$

مثال ۳ $p>1$. $\int_0^\infty e^{-x^p}dx$ می دانیم برای $x\geq 1$، $x^p\geq x \Rightarrow -x^p\leq -x \Rightarrow e^{-x^p}\leq e^{-x}$

$$\int_0^b e^{-x^p}dx = \int_0^1 e^{-x^p}dx + \int_1^b e^{-x^p}dx \leq \int_0^1 e^{-x^p}dx + \int_1^b e^{-x}dx \leq \int_0^1 e^{-x^p}dx + 1 < \infty$$

آزمون مقایسه. فرض کنید f و g دو تابع نامنفی روی $[a,\infty[$ باشند که روی هر $[a,b]$ انتگرال پذیرند و $K>0$ وجود دارد که برای $x>K$، $f(x)<g(x)$.

الف) اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g(x)dx$ واگرا است.

ب) اگر انتگرال $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد، $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا است.

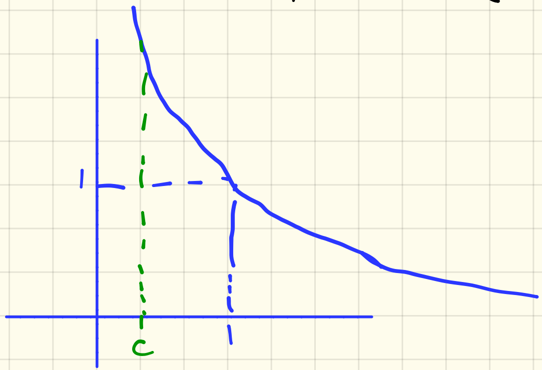
انتگرال ناسره نوع دوم: تابع بی‌کران روی بازه کراندار

f روی $[a,b[$ تعریف شده باشد و برای هر $c \in [a,b[$ روی $[a,c]$ انتگرال‌پذیر باشد (علی‌الخصوص روی هر $[a,c]$ کراندار باشد) در این صورت در صورت وجود $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$، این مقدار را برابر $\int_a^b f(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم.

$[c,b]$ $\quad$ $]a,b]$

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ $\quad p>0$



$$\int_c^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \ln x\Big|_c^1 = -\ln c & p=1 \\ \frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{c^{p-1}}\right) & p\neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{p-1}}dx$$

واگرا $p\geq 1$

همگرا $p<1$

مثال: $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}\,dx$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}} \overset{x>1}{<} \frac{x^2}{\sqrt{x^4(x-1)}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad x^4(x-1) < (x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1) = x^5-1$$

$$\forall c>1 \quad \int_c^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^5-1}}\,dx \le \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_{c-1}^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy < \infty$$

مثال: $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$

واگرا

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx}_{\substack{\text{همگرا } p<1 \\ \text{واگرا } p\ge 1}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx}_{\substack{\text{همگرا } p>1 \\ \text{واگرا } p\le 1}}$$

مثال: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$

همگرا

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx}_{\le \frac{1}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx}_{\le \frac{1}{x^{3/2}}}$$

مثال.

واگراست

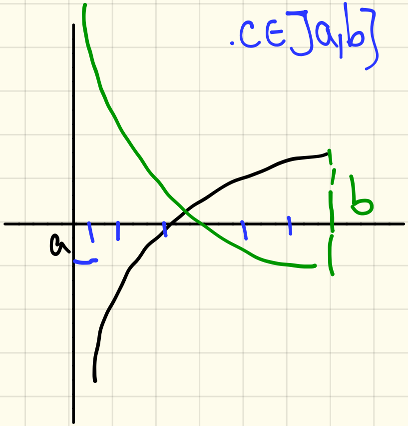
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx}_{\ln|x|} + \underbrace{\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\,dx}_{\ln x}$$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}\,dx = \ln(\varepsilon_1) \xrightarrow{\varepsilon_1\to 0} -\infty \qquad \int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}\,dx = -\ln\varepsilon_2 \xrightarrow{\varepsilon_2\to 0} \infty$$

$$\ln\varepsilon_1 - \ln\varepsilon_2 = \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

مجموع ریمان برای انتگرال ناسره.

گزاره. فرض کنید $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ و روی هر $[c,b]$ انتگرال‌پذیر باشد $.c\in]a,b]$



الف) f صعودی و $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

ب) f نزولی و $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

برای هر افراز $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ قرار دهید $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$

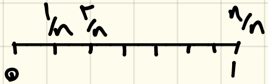
$$\lim_{\text{قطر}\, P\to 0} S(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: محاسبه حد

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}} = a_n$$

$$\ln a_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \ln x\,dx$$



$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = x\ln x - x\Big|_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -1$$

$$a_n \to e^{-1} = 1/e$$