به نام او

ریاضی عمومی ۱

تابع نمایی

$\ln :]0,\infty[\to]-\infty,\infty[$ $\qquad$ $\ln x = 1/x$

مشتق پذیر اکیداً صعودی

$\exp(x) = \exp x :]-\infty,\infty[\to]0,\infty[$ $\qquad$ وارون $\ln$

شرایط $\ln \Rightarrow \exp$ تابعی اکیداً صعودی و مشتق پذیر

مشتق بگیر

$$\ln(\exp x) = x \Rightarrow \frac{1}{\exp x} \times \exp' x = 1 \Rightarrow \exp' x = \exp x$$

1) $\ln 1 = 0 \Rightarrow \exp 0 = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b \Rightarrow \exp(x+y) = \underbrace{\exp x}_{a} . \underbrace{\exp y}_{b} : e^{x+y} = e^x e^y$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ $\ln a^r = r \ln a$ برای هر r گویا مثبت $\exp(a-b) = \exp a / \exp b$

$\Rightarrow \exp(xr) = (\exp(x))^r : e^{rx} = (e^x)^r$

۲) $\ln e = 1$ عددی $2<e<3$ وجود دارد که $\Rightarrow \exp 1 = e$

۳) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ $\forall r>0$ داریم $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \xRightarrow{a=\ln x} \lim_{a\to\infty} \frac{a^{1/r}}{(\exp a)} = 0$

$, \lim_{a\to\infty} \exp a = \infty$

۴) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\forall r>0$ داریم $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$

$\Downarrow a = \ln x$ $\Downarrow$

$\lim_{x\to -\infty} \exp a = 0^+$ $\lim_{a\to -\infty} (\exp a)^r \times a = 0$

r گویا مثبت:

$$\exp(xr) = (\exp x)^r$$

$$x=1 \Rightarrow \exp(r) = e^r$$

$$a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{1/n} = b \Leftrightarrow b^n = a \qquad a^r$$

r گویا و a مثبت.

تنها گزینه برای گسترش پیوسته مفهوم به توان رساندن از اعداد گویا به حقیقی استفاده از exp است.

به ازای $r \in \mathbb{R}$: $\quad e^r := \exp(r)$

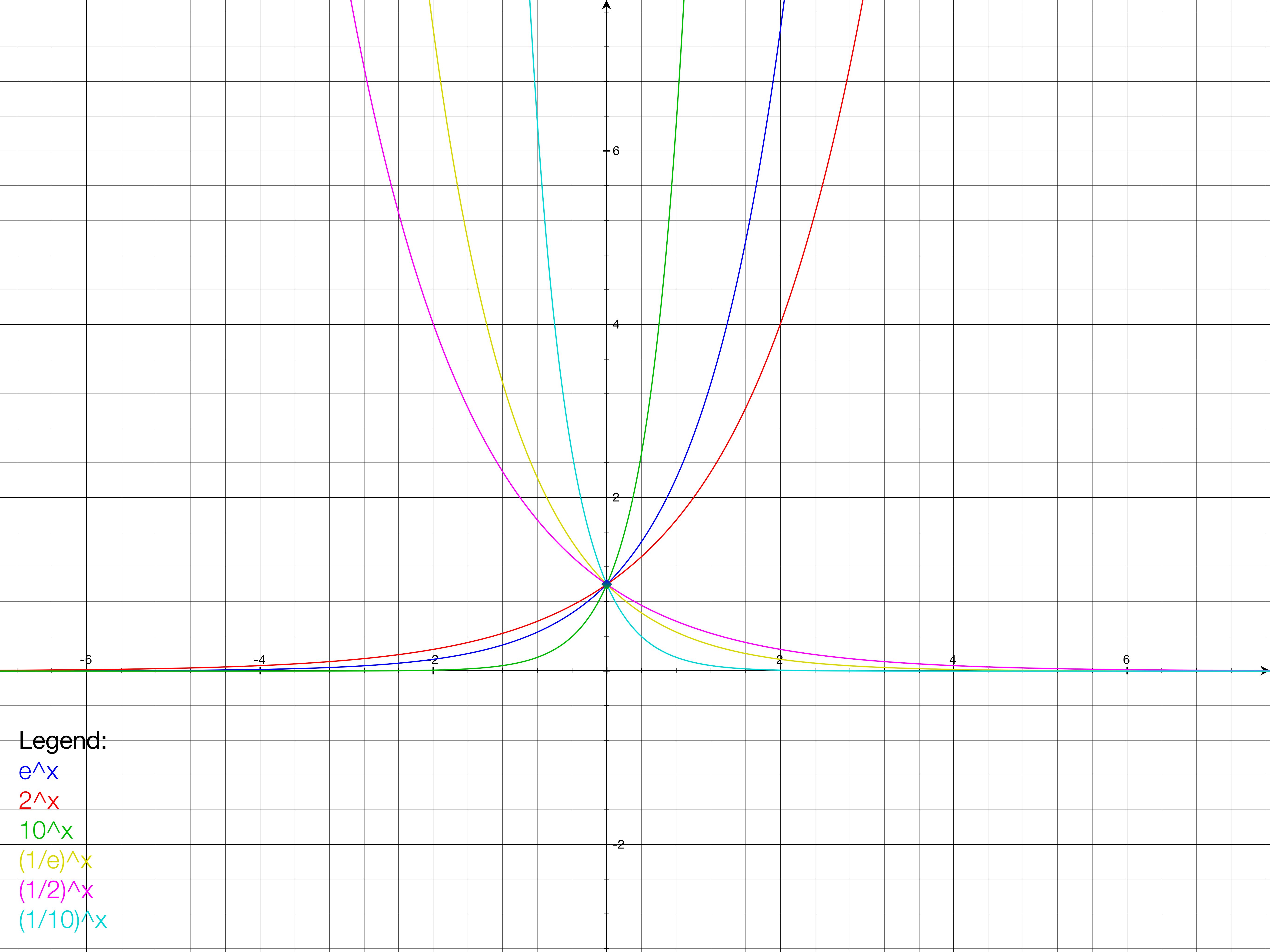
$$a = \exp(\ln a)$$

$$0 < a: \quad a^r = (\exp \ln a)^r = \exp(r \ln a)$$

$a^r = \exp(r \ln a)$: تنها کاندیدا گسترش پیوسته به توان r رساندن از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{R}$

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} = a^x \times a^y$$

$$a^{rx} = (a^x)^r \qquad a^0 = 1$$



-6
-4
-2
2
4
6
2
4
6
-2
Legend:
e^x
2^x
10^x
(1/e)^x
(1/2)^x
(1/10)^x

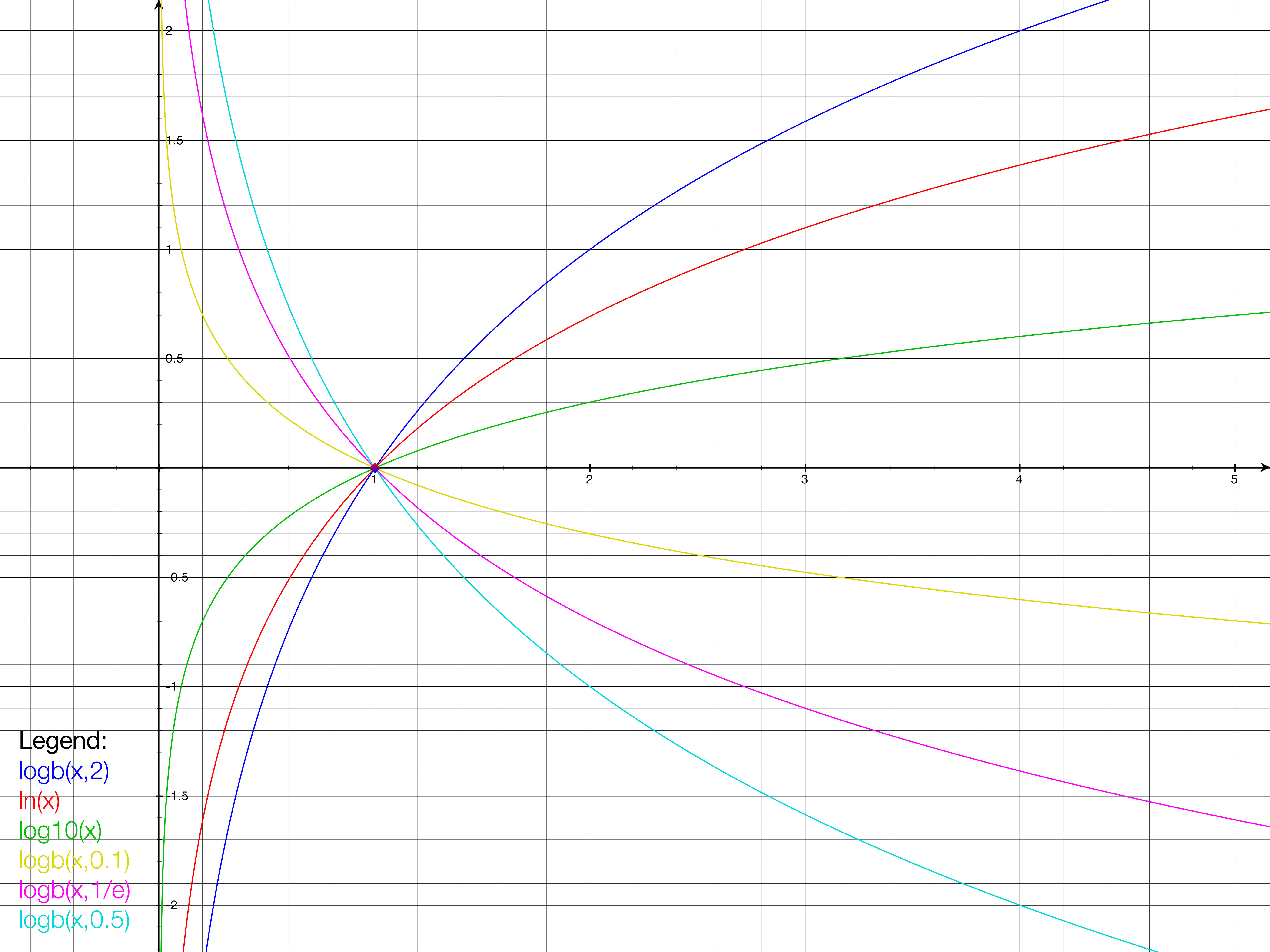
$$b = a^x = \exp(x \ln a)$$

$$b = a^x$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$$a^{\ln b / \ln a} = b$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$


2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
1
2
3
4
5
Legend:
logb(x,2)
ln(x)
log10(x)
logb(x,0.1)
logb(x,1/e)
logb(x,0.5)

سود پیوسته! d درصد در سال.

$$A + A\times \underbrace{\frac{d}{100}}_{r} = A\left(1+\frac{d}{100}\right) = A(1+r)$$

$\frac{d}{2}$ درصد در ۶ ماه $\qquad \frac{r}{2} = \frac{d}{200}$

$$\underbrace{\left(A+\frac{Ar}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)}_{A\left(1+\frac{r}{2}\right)^2} = A + \underbrace{\frac{Ar}{2} + \frac{Ar}{2}}_{Ar} + \frac{Ar^2}{4}$$

$\frac{d}{12}$ درصد هر ماه $\qquad \frac{r}{12} = \frac{d}{12\times 100} \Leftarrow A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$

در $\frac{1}{n}$ سال $\frac{d}{n}$ درصد آنگاه سود سالانه $\qquad A\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

تعریف حد: $\quad e^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t$

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+sx)}{s} & \text{اگر } |s|\neq 0 \\ x & s=0 \end{cases}$$

ادعا: f در $s=0$ پیوسته است.

$$\lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+sx)}{s} = x \Leftrightarrow \lim_{s\to 0}\underbrace{e^{\frac{\ln(1+sx)}{s}}}_{(1+sx)^{1/s}} = e^x$$

$$s=\frac{1}{t} \Downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x$$

اثبات پیوستگی. $\quad g(s) = \ln(1+sx)$

$$x = x\times\frac{1}{1+sx}\Big|_{s=0} = g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+hx) - \cancel{\ln(1+0\times x)}}{h}$$

توابع هذلولوی :

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

فرد

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

زوج

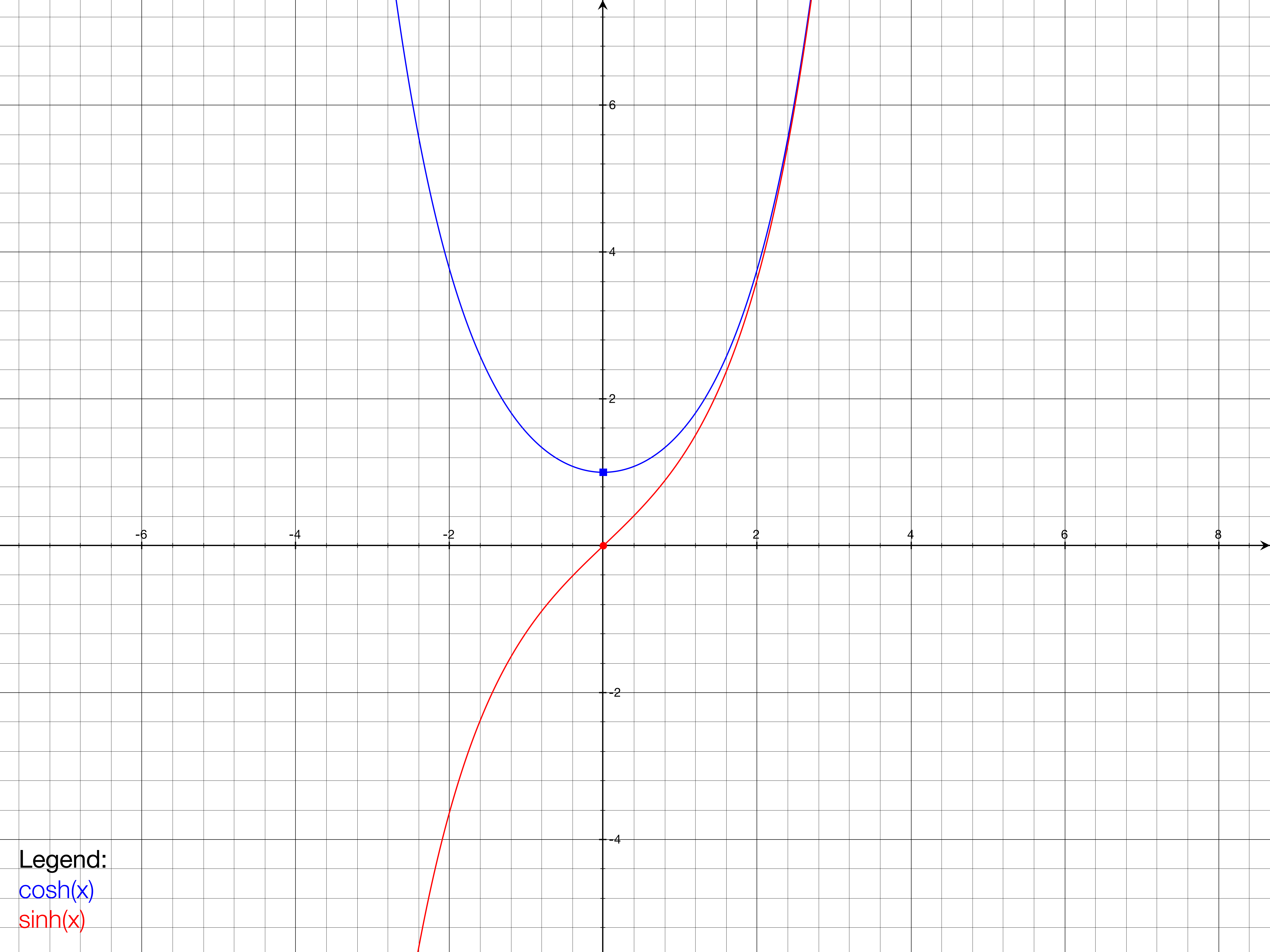
≥ 1

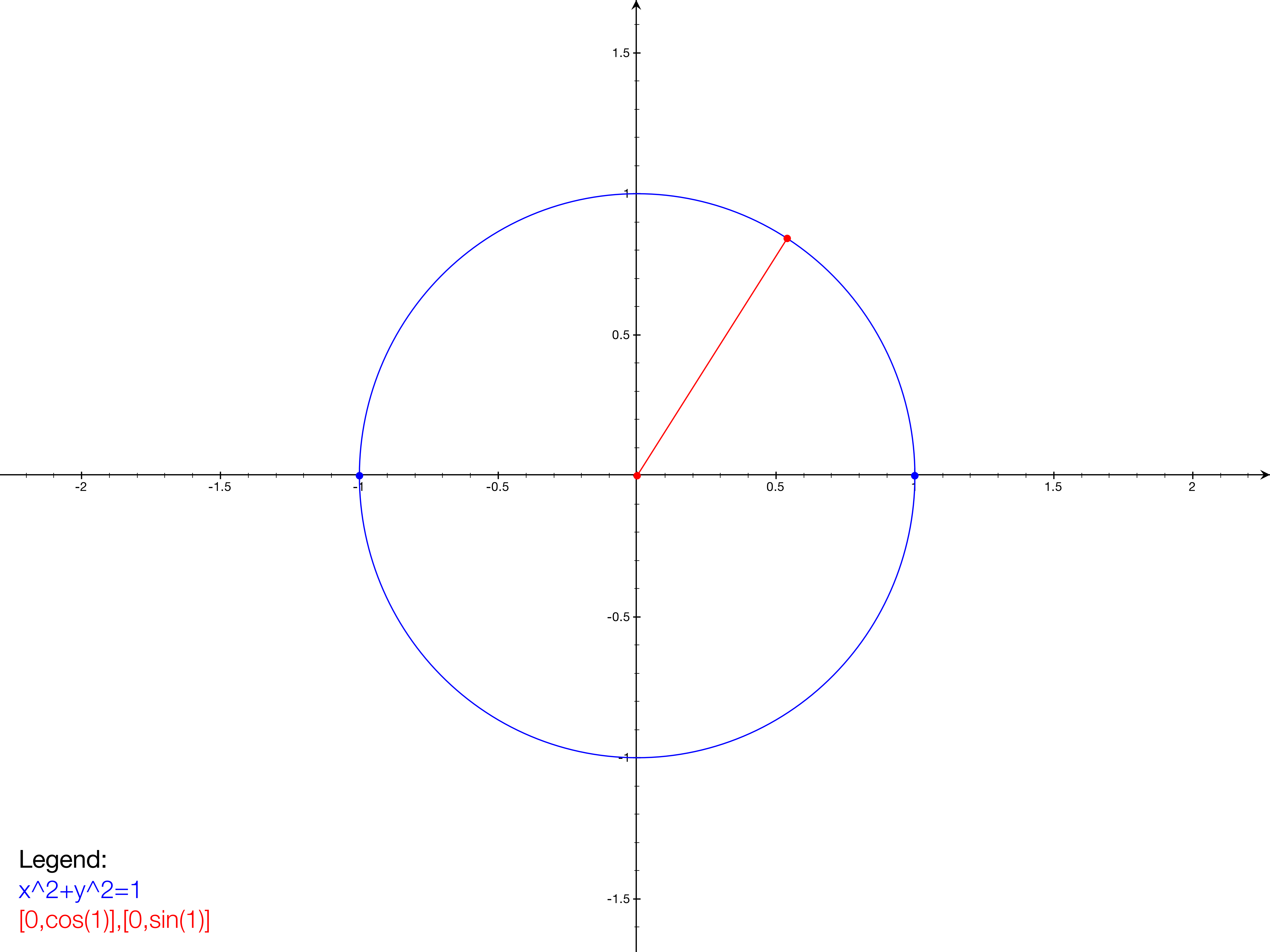
$$\cosh^{2} x - \sinh^{2} = 1$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

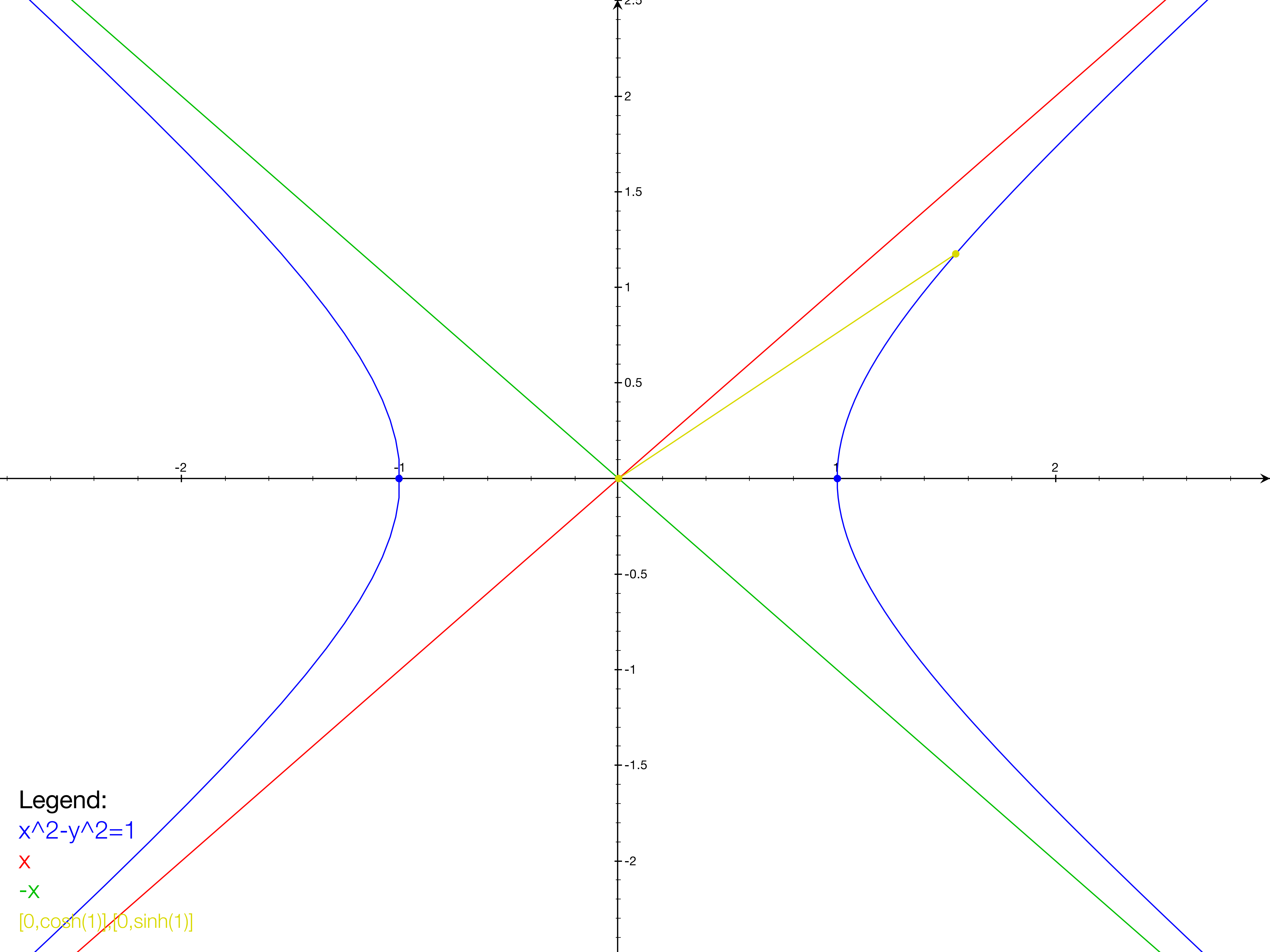
$$\operatorname{csch} = \frac{1}{\sinh x} \qquad \operatorname{ctgh} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\sinh' x = \cosh x \qquad \cosh' x = \sinh x$$


6
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
2
4
6
8
Legend:
cosh(x)
sinh(x)



Legend:
x^2+y^2=1
[0,cos(1)],[0,sin(1)]


2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1
1
2
Legend:
x^2-y^2=1
x
-x
[0,cosh(1)],[0,sinh(1)]