به نام او

ریاضی عمومی ۱

تغییر متغیر و انتگرال جزء به جزء

مشتق حاصل ضرب

$$(1)\quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

قاعده زنجیره

$$(2)\quad (f \circ \varphi)' = f' \circ \varphi \times \varphi'$$

انتگرال گیری جزء به جزء

$$(1) \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg' \Rightarrow \int f'g = fg - \int fg'$$

تغییر متغیر

$$(2) \Rightarrow f \circ \varphi = \int f' \circ \varphi \times \varphi' \longrightarrow$$

مثال ۱ $\int \ln x \, dx$

$$g = \ln x \qquad f' = 1 \Rightarrow f = x$$

$$\int \ln x \, dx = \int (f'g)(x) dx = fg - \int fg' = x \ln x - \int \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_{1} = x \ln x - x$$

یکی از موارد کاربرد ← توابعی با مشتق بهتر از خودشان!

مثال ۲ $\int x\sin x$

$x =: f \qquad \sin x = g' \Rightarrow g = -\cos x$

$$\int x\sin x = \underbrace{-x\cos x}_{f\times g} - \int f'\times g = -x\cos x - \int 1\times(-\cos x) = -x\cos x + \sin x$$

کاربرد ۲ ⇐ محاسبهٔ انتگرال حاصل‌ضرب یک چندجمله‌ای و تابعی خوب!

مثال ۳ $\int \cos^4 x\,dx$

$f' := \cos x \qquad g := \cos^3 x$

$\Downarrow$

$f = \sin x$

$$\int \cos^4 x = \sin x\cos^3 x - \int \sin x \times 3\cos^2 x \times (-\sin x)$$

$$= \sin x\cos^3 x + 3\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x = \sin x\cos^3 x + 3\int \cos^2 x - 3\int \cos^4 x$$

$$\Rightarrow \int \cos^4 x = \frac{1}{4}\left(\sin x\cos^3 x + 3\int \cos^2 x\right) = \frac{1}{4}\left(\sin x\cos^3 x + 3\int \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

کاربرد ۳ ⇐ در انتگرال‌گیری به تابع تکراری می‌رسیم.

گزاره: F و φ مشتق پذیر با مشتق پیوسته

و $F'=f$

اثبات: نتیجه فوری قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

$$F'=f$$

$$(F\circ\varphi)' = f\circ\varphi \times \varphi' \Rightarrow F\circ\varphi = \int f\circ\varphi \times \varphi'$$

$$\underset{\text{بازه}}{\varphi : I} \to \underset{\text{بازه}}{J} \qquad F: J \to \mathbb{R}$$

$$\int f\circ\varphi \times \varphi' = F\circ\varphi$$

مثال ۴ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^3-x^4}} \qquad x\in(0,1)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-x^4}} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1/x-1}}\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{x}-1 \Rightarrow \varphi' = -\frac{1}{x^2} \qquad f=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3-x^4}} = \int f\circ\varphi \times (-\varphi') = -F\circ\varphi = -2\sqrt{1/x-1}$$

صورت انتگرال معین تغییر متغیر

$\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ مشتق پذیر با مشتق پیوسته

$\varphi(\alpha)=a \quad \varphi(\beta)=b \qquad \varphi([\alpha,\beta])\subset I \qquad f:I\to\mathbb{R}$ پیوسته

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\times\varphi'(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$$

اثبات: قرار دهید $F=\int_a^x f(s)\,ds,\ x=\varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F\circ\varphi(\beta)-F\circ\varphi(\alpha)$$

چند تغییر متغیر معروف: $\sqrt{\pm x^2\pm a^2}$

الف) $\sqrt{x^2+a^2} \leftarrow x=a\,tg\,\theta$

$$\sqrt{x^2+a^2}=|a|\sqrt{tg^2\theta+1}=|a\sec\theta|$$

ب) $\sqrt{a^2-x^2} \leftarrow x=a\sin\theta$

$$\sqrt{a^2-x^2}=|a|\sqrt{1-\sin^2\theta}=|a\cos\theta|$$

ج) $\sqrt{x^2-a^2} \leftarrow x=a\sec\theta$

$$\sqrt{x^2-a^2}=|a|\times\sqrt{\sec^2\theta-1}=|a\,tg\,\theta|$$

مثال: مساحت زیر نمودار $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ بین خطوط عمود $x=0$ و $x=A>0$.

$$\int_0^A \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$x=\underset{\sim}{tg\theta} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = |\sec\theta| = \sec\theta$$

$$\theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}[$$

$$\varphi(\theta)=tg\theta$$

$$\int_0^A \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx = \int_0^{tg^{-1}A} f\circ\varphi(\theta)\times\varphi'(\theta)\,d\theta = \int_0^{tg^{-1}A}\frac{1}{(tg^2\theta+1)^{3/2}}\times tg'\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{tg^{-1}A}\cos^3\theta\times\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{tg^{-1}A}\cos\theta\,d\theta=\sin(tg^{-1}A)$$

$$\sin(tg^{-1}A)=\sqrt{\sin^2(tg^{-1}A)}=\sqrt{1-\cos^2(tg^{-1}A)}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{1+tg^2(tg^{-1}A)}}=\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}$$

$$x = tg\,\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = tg'\theta = \sec^{۲}\theta \Rightarrow dx = \sec^{۲}\theta\, d\theta$$

$$\int_0^A \frac{1}{(x^{۲}+1)^{۳/۲}}\,dx = \int_0^{tg^{-1}A} \frac{1}{(tg^{۲}+1)^{۳/۲}} \times \sec^{۲}\theta\, d\theta$$