

به نام او
ریاضی عمومی ۱
تغییر متغیر و انتگرال جزء به جزء

نتیج حاصل ضرب

فاکتور زنجیر

$$① \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$② \quad (f \circ \varphi)' = f' \circ \varphi \times \varphi'$$

$$① \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg' \Rightarrow \int f'g, fg - \int fg'$$

انتگرال گیری جز و جز

$$② \Rightarrow f \circ \varphi = \int f' \circ \varphi \times \varphi' \rightarrow$$

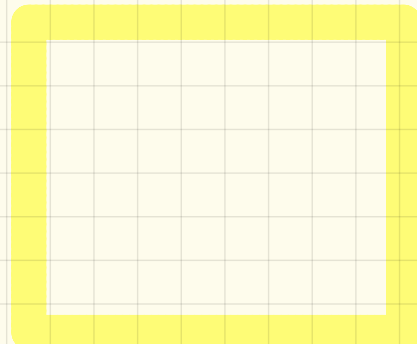
تغییر متغیر

$$g = \ln x \quad f' = 1 \Rightarrow f = x$$

مثال $\int \ln x dx$

$$\int \ln x dx = \int (f'g) dx = fg - \int fg' = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} = x \ln x - x$$

یکی از موارد کاربرد توابعی با مشتق برابر خودشان!



$$x =: f \quad \sin x = g' \Rightarrow g = -\cos x$$

$$\int x \sin x \quad \text{مثال ۲}$$

$$\int x \sin x = \underbrace{-x \cos x}_{f \times g} - \int f' \times g = -x \cos x - \int 1 \times (-\cos x) = -x \cos x + \sin x$$

کاربرد ۲ \Leftarrow برای سبب اشتغال حاصل ضرب یک چند جمله‌ای و تابعی خوب!

$$\begin{aligned} f' &:= \cos x & g &:= \cos^2 x \\ \downarrow & & & \\ f &= \sin x & & \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x \, dx \quad \text{مثال ۳}$$

$$\int \cos^2 x = \sin x \cos^2 x - \int \sin x \times 2 \cos x (-\sin x)$$

$$= \sin x \cos^2 x + 2 \int (1 - \cos^2 x) \cos x = \sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x - 2 \int \cos^3 x$$

$$\Rightarrow \int \cos^3 x = \frac{1}{2} (\sin x \cos^2 x + 2 \int \cos x) = \frac{1}{2} (\sin x \cos^2 x + 2 \int \frac{1 + \cos 2x}{2})$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

کاربرد ۳ \Leftarrow در اشتغال کسری با ج تابع متداری رسم

$$F' = f$$

$$(F \circ \varphi)' = f \circ \varphi \times \varphi' \Rightarrow F \circ \varphi = \int f \circ \varphi \times \varphi'$$

$$\varphi: I \xrightarrow{\text{بازه}} J \quad F: J \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int f \circ \varphi \times \varphi' = F \circ \varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x - 1}} \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \varphi' = -\frac{1}{x^2} \quad f = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}} = \int f \circ \varphi \times (-\varphi') = -F \circ \varphi = -2\sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$$

گذاره: $F \circ \varphi$ مستقیم زیر با مستقیم پیوسته

$$F' = f$$

اثبات: نتایج فور و قسبه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$x \in (0, 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^4}} \quad \text{مثال ۴}$$

$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ متغيرياً بيوتاً

$$\varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b \quad \varphi([\alpha, \beta]) \subset I$$

صورت اشتراك بين المتغيرين
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ بيوتاً

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

أبواب، قدر، عهد $x = \varphi(t)$
 $F = \int_a^x f(s) ds$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha)$$

$$\sqrt{x^2 + a^2}$$

متغير متغير معروف:

$$x = a \tan \theta$$

$$\leftarrow \sqrt{x^2 + a^2} \quad (\text{الف})$$

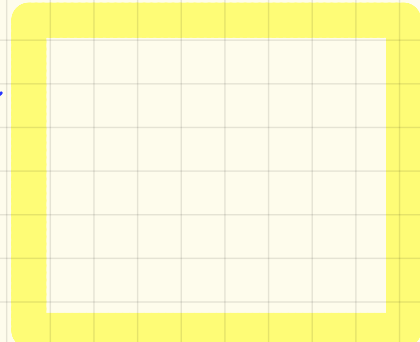
$$\sqrt{x^2 + a^2} = |a| \sqrt{\tan^2 \theta + 1} = |a \sec \theta|$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = |a| \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = |a \cos \theta|$$

$$x = a \sin \theta \leftarrow \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = |a| \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = |a \tan \theta|$$

$$x = a \sec \theta \leftarrow \sqrt{x^2 - a^2} \quad (\text{ج})$$



مثال: مساحت زیر نمودار $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ من خطوط عمود $x=0$ و $x=A>0$

$$\int_0^A \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx$$

$$x = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = |\sec \theta| = \sec \theta$$

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

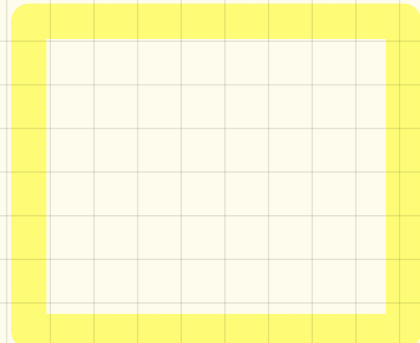
$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\varphi(\theta) = \operatorname{tg} \theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} dx &= \int_0^{\operatorname{tg}^{-1} A} f \circ \varphi(\theta) \times \varphi'(\theta) d\theta = \int_0^{\operatorname{tg}^{-1} A} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 \theta + 1)^{3/2}} \times \operatorname{tg}' \theta d\theta \\ &= \int_0^{\operatorname{tg}^{-1} A} \cos^2 \theta \times \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\operatorname{tg}^{-1} A} \cos \theta d\theta = \sin(\operatorname{tg}^{-1} A) \end{aligned}$$

$$\sin(\operatorname{tg}^{-1} A) = \sqrt{\sin^2(\operatorname{tg}^{-1} A)} = \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{tg}^{-1} A)}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{tg}^{-1} A)}} = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}}$$



$$x = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \operatorname{tg}' \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow dx = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int_0^A \frac{1}{(x+1)^r} dx = \int_0^{\operatorname{tg}^{-1} A} \frac{1}{(\operatorname{tg} \theta + 1)^r} \times \sec^2 \theta d\theta$$

